第3章 中值定理与导数应用

- 中值定理
- 洛必达法则
- 泰勒公式
- 函数的单调性和极值
- 函数图形的描绘
- 平面曲线的曲率

3.1　中值定理

3.1.1　费马(Fermat)引理

3.1.2　罗尔(Rolle)定理

3.1.3　拉格朗日(Lagrange)定理

3.1.4　柯西(Cauchy)中值定理

设做直线运动的质点,它的路程规律是$s=s(t)$,

在时刻a和时刻b之间:

平均速度: $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(b)-s(a)}{b-a}$

假设 $s(t)\in C_{[a,b]}$, $v(t)=s'(t)\in C_{[a,b]}$

速度有最小值m和最大值M

$$m\le \bar{v}\le M$$

$$\Rightarrow \exists \xi\in[a,b],\text{使得}\ \bar{v}=s'(\xi)=\frac{s(b)-s(a)}{b-a}$$

3.1.1 费马(Fermat)引理

定义3.1.1 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，$x_0\in(a,b)$，若存在 x_0 的一个邻域，在其中当 $x\neq x_0$ 时，

(1) $f(x)<f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**极大点**，

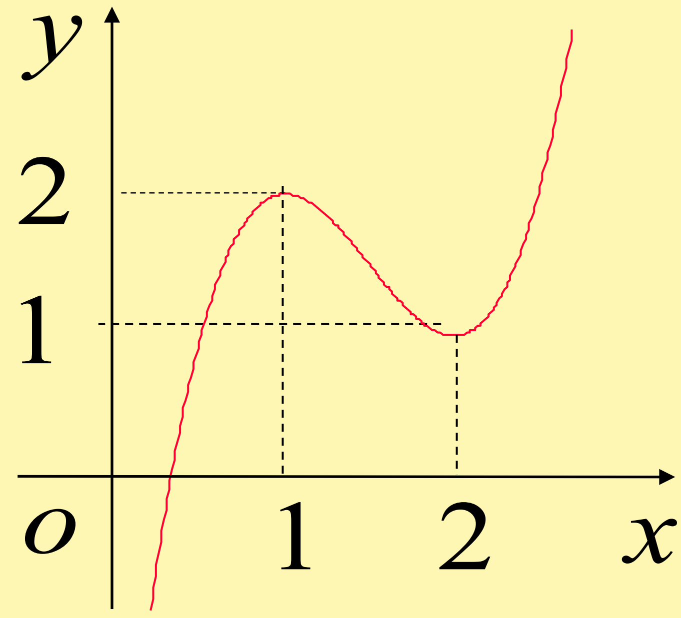
称 $f(x_0)$ 为函数的**极大值**；

(2) $f(x)>f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**极小点**，

称 $f(x_0)$ 为函数的**极小值**．

极大点与极小点统称为**极值点**．

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$$



$x=1$ 为极大点 ，

$f(1)=2$ 是极大值

$x=2$ 为极小点 ，

$f(2)=1$ 是极小值

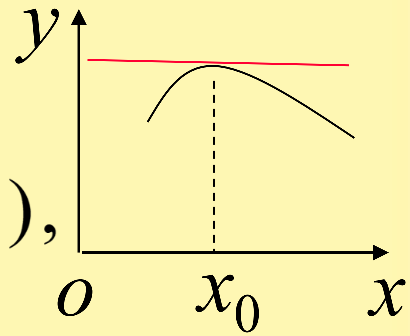
注　1） **函数的极值是函数的局部性质.**

极大值未必是最大值，极小值也未必是最小值

2）　**取得极值** $\overset{?}{\rightleftarrows}$ **导数为0**

费马(Fermat)引理

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x)\text{在}(x_0-\delta,x_0+\delta)\text{有定义} \\ \text{且}\ f(x)\le f(x_0),\ f'(x_0)\ \text{存在} \\ \qquad(\text{或}\ge) \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x_0)=0$$



证明 设 $\forall x_0+\Delta x\in U(x_0), f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$,

当 $\Delta x>0$ 时: $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0,$

由极限的局部保序性知 $f'_+(x_0)\le 0.$

当 $\Delta x<0$ 时: $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0 \Rightarrow f'_-(x_0)\ge 0$

由 $f'(x_0)$ 存在知: $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=0$

Fermat引理：若函数 $f(x)$ 在内点 $x_0 \in I$ 取得极值且在该点可微，则 $f'(x_0)=0$.

注 （1） $f\left(x\right)$ 在点 x_0 处可微的条件不能去

例如函数 $y=\left|x\right|$ 在 $x=0$ 处

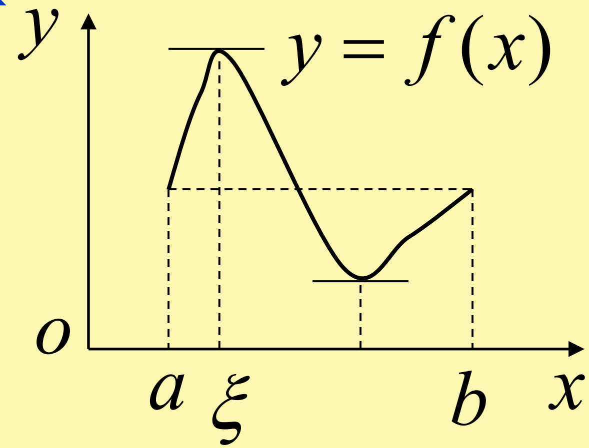
(2)此定理只是 $f\left(x\right)$ 取得极值的必要条件，

而非充分条件。 **例如函数 $y=x^3$ 在 $x=0$ 处**

(3)几何上可微函数在极值点处的切线是水平的.

(4) 称导数为零的点为函数的驻点（稳定点）.

3.1.2、罗尔(Rolle)定理



罗尔（ Rolle ）定理

$y=f(x)$ 满足:

（1）在区间 $[a\ ,b]$上连续

（2）在区间 $(a\ ,b)$内可导

（3）$f(a)=f(b)$

$\Longrightarrow$ 在$(a\ ,b\ )$内至少存在一点ξ，使 $f'(\xi)=0.$

证明 因$f(x)$在$[a\ ,b]$上连续，故在$[a\ ,b]$上取得最大值 M 和最小值 m .

若 $M=m$，则 $f(x)\equiv M,\ x\in[a\ ,b]$,

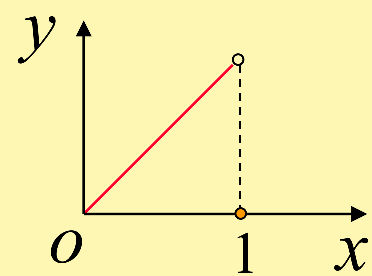
因此$\forall\xi\in(a\ ,b),\ f'(\xi)=0.$

Rolle 定理 $f(x)\in C_{[a,b]}$, $f(x)$在(a,b)可导, $f(a)=f(b)$ $\Rightarrow \exists \xi\in(a,b)$, 使得$f'(\xi)=0$.

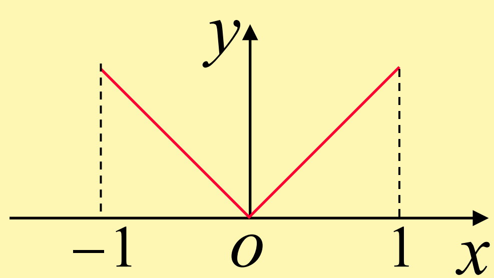
若$M>m$，则M和m中至少有一个与端点值不等, 不妨设 $M\neq f(a)$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=M$, 则由费马引理得 $f'(\xi)=0$.

注 (1)定理条件不全具备，结论不一定成立.

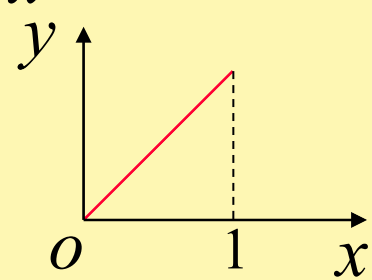
例如 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$



$f(x)=|x|$
$x\in[-1,1]$

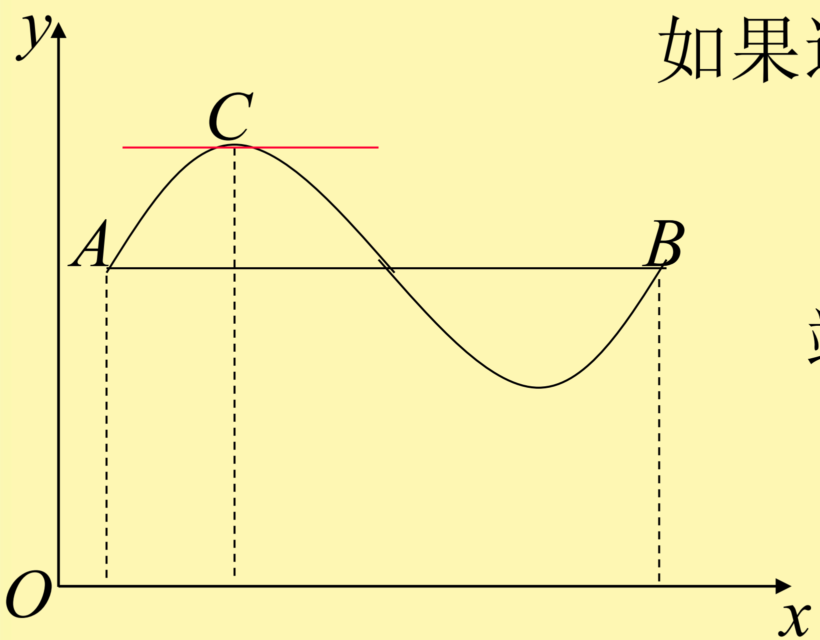


$f(x)=x$
$x\in[0,1]$



Rolle 定理 $f(x)\in C_{[a,b]}, f(x)$在(a,b)可导，
$f(a)=f(b) \Rightarrow \exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0.$

(2) 罗尔定理的几何意义



如果连续曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 除端点外处处有不垂直于x轴的切线，且端点处的纵坐标相等，则 $\overset{\frown}{AB}$ 上至少存在一异于A、B 的点C，使 $\overset{\frown}{AB}$ 在该点的切线平行于x轴（平行于弦AB）

例1 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于1的正实根 .

证明 1）存在性.

设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $f(0)=1$, $f(1)=-3$. 由介值定理知存在 $x_0\in(0,1)$, 使 $f(x_0)=0$, 即方程有小于 1的正根 x_0.

2）唯一性.

假设另有 $x_1\in(0,1)$, $x_1\neq x_0$, 使 $f(x_1)=0$, $\because f(x)$ 在以 x_0, x_1 为端点的区间满足罗尔定理条件, $\therefore$ 在 x_0, x_1 之间至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)=0$.

但 $f'(x)=5(x^4-1)<0$, $x\in(0,1)$, 矛盾, 故假设不真!

例2 设 $f(x)$在$[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导， 且 $f(1)=0$，

求证存在 $\xi\in(0,1)$，使 $\boldsymbol{nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0}$，其中$\boldsymbol{n\geq 1}$.

证明 设辅助函数 $\varphi(x)=x^n f(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在$[0,1]$上满足罗尔定理条件,

因此至少存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\varphi'(\xi)=n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)=0$$

即

$$nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$

例3 若$f(x)$可导，试证在其两个零点间一定有$f(x)+f'(x)$的零点.

证明 设 $f(x_1)=f(x_2)=0,\ x_1<x_2,$

欲证: $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$

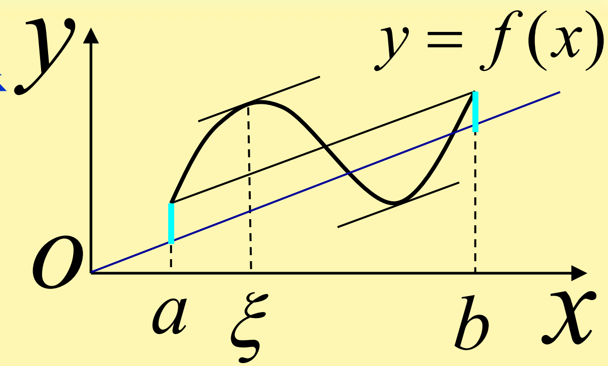
作辅助函数 $\boldsymbol{F(x)=e^x f(x)}$, 显然 $F(x)$在$[x_1,x_2]$上满足罗尔定理条件.

因此$\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得$[e^x f(x)]'\big|_{x=\xi}=0$

$$\boldsymbol{e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0}$$

整理得$f(\xi)+f'(\xi)=0.$

3.1.3 拉格朗日(Lagrange)定理



$y = f(x)$ 满足:

(1) 在区间$[a\ ,b]$上连续

(2) 在区间(a, b) 内可导

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.$

证: 问题转化为证 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

显然 , $\varphi(x)$ 在$[a, b]$ 上连续 ,在(a, b) 内可导, 且

$\varphi(a)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=\varphi(b)$, 由罗尔定理知至少存在一点

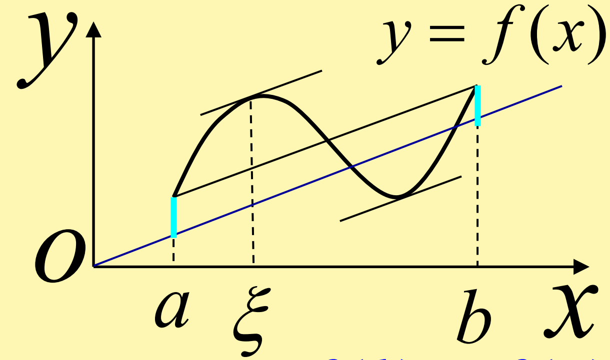
$\xi\in(a,b)$, 使 $\varphi'(\xi)=0$, 即定理结论成立 . 证毕

拉格朗日(Lagrange)定理

$y = f(x)$ 满足:

(1) 在区间$[a\ ,b]$上连续

(2) 在区间(a, b) 内可导



$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

几何解释:

如果连续曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上除端点外处处具有不垂直于 x 轴的切线，那么这弧上至少有一点 C,在该点处的切线平行于弦 AB.

Beijing celebrates the wonder of the amazing Mean Value Theorem

the mean value theorem of calculus decorate a pedestrian bridge across Zhushikou Dong Dajie in Beijing

The picture is taken a few blocks south of Tiananmen Square (between Qianmen and the Temple of the Heaven, in Chongwen District of the city

2 拉格朗日中值公式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

$$\theta=\frac{\xi-a}{b-a} \quad f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$$

$$(0<\theta<1)$$

$f(x)\in C_{[a,b]}$, 在 (a,b) 内可导, $x_0, x_0+\Delta x\in(a,b)$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

$$\Delta y=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

$$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x=dy$$

拉格朗日中值公式又称**有限增量公式**.

拉格朗日中值定理又称**有限增量定理**.

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot(x-x_0)\quad (0<\theta<1).$$

推论 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 $f'(x)\equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上必为常数.

证: 在 I 上任取两点 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$, 在 $[x_1, x_2]$ 上用拉格朗日中值公式，得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0\quad (x_1<\xi<x_2)$$

$$\therefore\quad f(x_2)=f(x_1)$$

由 x_1, x_2 的任意性知, $f(x)$ 在 I 上为常数 .

例5 证明等式 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2},\ \ x \in [-1, 1].$

证明 设$f(x) = \arcsin x + \arccos x$，则在$(-1, 1)$上

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv 0$$

由推论可知 $f(x) = \arcsin x + \arccos x = C$ （常数）

令 $x = 0$，得 $C = \dfrac{\pi}{2}$.

又 $f(\pm 1) = \dfrac{\pi}{2}$，故所证等式在定义域 $[-1, 1]$上成立.

说明 欲证 $x \in I$ 时 $f(x) = C_0$，只需证在 I 上 $f'(x) \equiv 0$，且 $\exists\, x_0 \in I$，使 $f(x_0) = C_0$.

例6　　证明当$x>1$时，$e^x>ex$.

证明　令$f(t)=e^t-et$, 当$x>1$时，$f(t)$在$[1,x]$上满足拉格朗日定理的条件, 则存在$\xi\in(1,x)$使

$$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1)$$

即$e^x-ex-0=(e^\xi-e)(x-1)\quad 1<\xi<x$

而$e^\xi-e>0,\ x-1>0,$

于是有 $e^x-ex>0$, 即$e^x>ex,(x>1)$

例7 证明不等式$\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x>0)$.

证明 设$f(t)=\ln(1+t)$,则$f(t)$在$[0,x]$上满足拉格朗日中值定理条件, 因此

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0), \quad 0<\xi<x$$

即
$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}, \qquad 0<\xi<x$$

因为
$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x$$

故
$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \qquad (x>0)$$

3.1.4 柯西(Cauchy) 定理

$f(x)$ 及 $F(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a\ ,b]$ 上连续

(2) 在开区间 $(a\ ,b)$ 内可导

(3) 在开区间 $(a, b\ )$ 内 $F'(x) \neq 0$

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

$\because f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a), \xi \in (a,b)$

$F(b)-F(a) = F'(\xi)(b-a), \xi \in (a,b)$

两个 ξ 不一定相同

上面两式相比即得结论. **错!**

$f(x)$ 及 $F(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[a\ ,b]$ 上连续

(2) 在开区间 $(a\ ,b)$ 内可导

(3) 在开区间 $(a, b\ )$ 内 $F'(x) \neq 0$

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

分析 $F(b)-F(a) = F'(\eta)(b-a) \neq 0 \qquad a<\eta<b$

要证 $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)-f'(\xi)} = 0 \qquad \varphi'(\xi)$

$$\Longrightarrow \varphi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$$

$f(x)$及$F(x)$满足：(1) 在闭区间$[a,b]$上连续(2) 在开区间(a,b)内可导(3)在开区间(a,b)内$F'(x)\neq 0$

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

证明 作辅助函数$\varphi(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且

$$\varphi(a)=\frac{f(b)F(a)-f(a)F(b)}{F(b)-F(a)}=\varphi(b)$$

由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，即

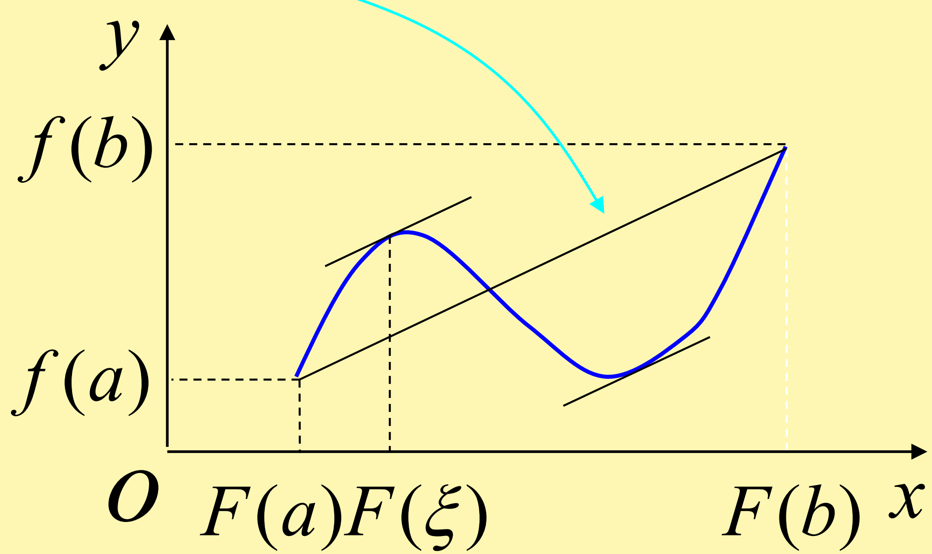
$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

柯西定理的几何意义:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}}=\boxed{\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}}$$

弦的斜率　　切线斜率

$$\begin{cases} x = F(t) \\ y = f(t) \end{cases}$$



注

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f'(t)}{F'(t)}$$

例8 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

分析：结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}$$

证 设 $F(x)=x^2$, 则$f(x), F(x)$在$[0, 1]$上满足柯西中值定理条件, 因此在（ 0 , 1）内至少存在一点 ξ ,使

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$

小结

1. 微分中值定理的条件、结论及关系

费马引理

罗尔定理

$f(b)=f(a)$

拉格朗日中值定理

$F(x)=x$

柯西中值定理

$f(b)=f(a)$

$F(x)=x$

2. 微分中值定理的应用

(1) 证明恒等式

(2) 证明不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

关键:
利用逆向思维
设辅助函数